STUCTURES HYPERSTATIQUES
METHODE DES FORCES

1 Introduction:

Nous avons précédemment défini les **structures hyperstatiques** comme étant des structures où le nombre d'inconnues statiques est supérieur au nombre d'équations d'équilibre statique que l'on peut obtenir pour déterminer ces inconnues. Le degré d'hyperstatisme correspond à la différence entre le nombre d'inconnues statiques et le nombre d'équations d'équilibre indépendantes. (La méthode des cadres permettant de déterminer le degré d'hyperstatisme d'une structure)

Plusieurs méthodes permettent de résoudre des structures hyperstatiques. Nous avons au programme deux méthodes :

→ *La méthode des forces*

→ *La méthode des déplacements* (prochain chapitre)

Nous allons donc exposer la ***méthode des forces*** qui n'est réellement intéressante que pour les structures où le degré d'hyperstaticité ne dépasse pas **2**.

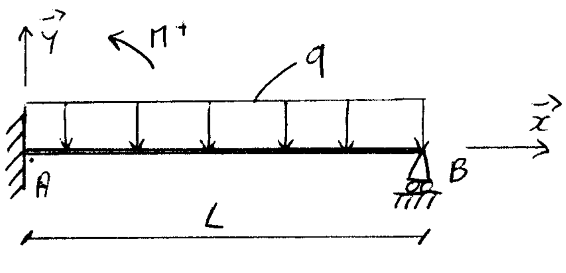
2 Principe de la méthode des forces :

Comme toute méthode d'analyse des structures hyperstatiques, la ***méthode des forces*** est basée sur les deux exigences suivantes : ***l'équilibre de la structure*** et la ***compatibilité des déformations***.

L'exigence d'équilibre est satisfaite si, à chaque étape du calcul, on peut utiliser les équations d'équilibre statique. L'exigence de compatibilité des déformations est satisfaite en écrivant une ou plusieurs équations qui spécifient que les déformations sont compatibles avec les liaisons de la structure et qu'il n'y a aucune discontinuité intérieure. Ces équations fournissent les équations additionnelles de compatibilité nécessaires pour déterminer les inconnues hyperstatiques. La méthode des forces est utilisée lorsque le degré d'hyperstaticité est faible. Dès que le nombre d'inconnues hyperstatiques dépasse 2, les calculs deviennent laborieux.

3 Etapes du calcul :

Nous allons illustrer la méthode sur l'exemple ci-dessous :



Encastrement en A et appui ponctuel en B

<u>Méthode des cadres :</u>

N = 1 cadre

0 i_c en A et 2 i_c en B (1 rot et 1 trans/x)

<u>d°h = 3*1-2 = 1</u>

<u>Les étapes du calcul sont les suivantes :</u>

① A une structure hyperstatique donnée, on associe une structure isostatique stable en supprimant un nombre suffisant d'inconnues hyperstatiques. Les inconnues hyperstatiques peuvent être des actions d'appui ou des efforts intérieurs surabondants qu'on met en évidence en effectuant des coupures aux appuis ou dans les barres de la structure hyperstatique. Le nombre **n** d'inconnues supprimées pour rendre la structure isostatique est égal au degré d'hyperstaticité.

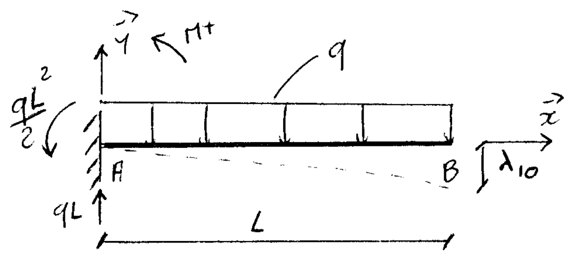
② On applique à la structure isostatique associée les charges réelles données (c'est à dire les charges agissant sur la structure hyperstatique) et des forces ou des couples unité correspondant à la valeur unité des inconnues hyperstatiques $\mathbf{X_i}$ dont, à ce stade on ne connaît pas la valeur.

③ A chaque point (désigné par un chiffre ou une lettre) de la structure isostatique associée où agit une inconnue hyperstatique, on calcule :

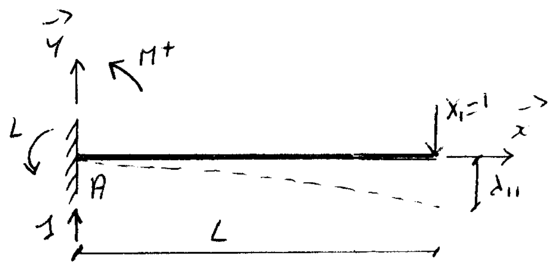
- les déplacements λ_{ii} dus aux charges réelles données ;

- les déplacements λ_{ij} dus aux forces ou aux couples unité correspondant à la valeur unité des inconnues hyperstatiques $\mathbf{X_i}$; λ_{ij} est le déplacement au point **i** dû à une force ou à un couple unité appliqué en **j**.

S_0 (structure isostatique associée)

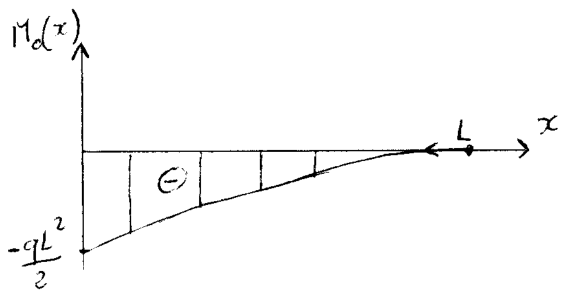


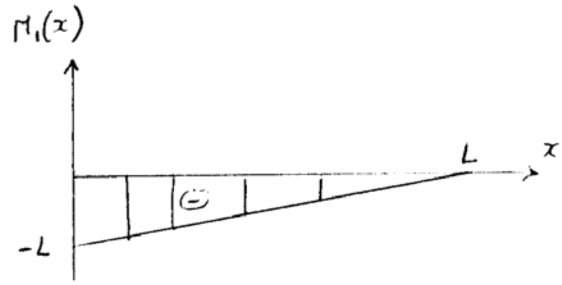
S_1 (structure isostatique chargée virtuellement)



Pour pouvoir déterminer les déplacements λ_{10} et λ_{11} il faut tout d'abord tracer le diagramme du moment fléchissant pour chacune des structures et ensuite appliquer le principe de conservation de l'énergie de déformation.

Pour cela, nous utiliserons les intégrales de Mohr.





$$\boxed{\lambda_{ij} = \int_{structure} \frac{M_i . M_j}{E.I} . dx}$$

Le résultat donné par les intégrales de Mohr doit être multiplié par. $\dfrac{longueur\_tronçon}{E.I}$

Cela nous donne donc : ***(Ici il n'y a qu'un tronçon)***

➔ λ_{10}: déplacement au point B de la structure isostatique (S_0) sous chargement réel suivant la direction de X_1.

$$\boxed{\lambda_{10} = \left(\frac{L}{E.I}\right)\frac{1}{4}.\left(\frac{-q.L^2}{2}\right).(-L) = \frac{q.L^4}{8.E.I}} \qquad (9.5)$$

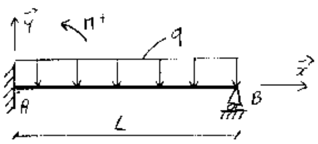
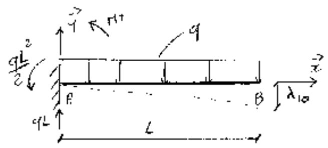
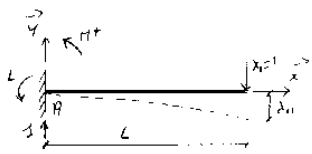
➔ λ_{11}: déplacement au point B de la structure (S_1) sous le chargement virtuel unitaire X_1 suivant la direction de X_1.

$$\boxed{\lambda_{11} = \left(\frac{L}{E.I}\right).\frac{1}{3}.(-L).(-L) = \frac{L^3}{3.E.I}} \qquad (5.5)$$

④ A chaque point où agit une inconnue hyperstatique, en suivant le principe de superposition, on fait la somme des déplacements ou des rotations calculées à l'étape ③ et l'on écrit que cette somme est égale à la valeur du déplacement ou de la rotation de l'inconnue hyperstatique. Par exemple, si l'inconnue hyperstatique est l'action verticale d'un appui simple, le déplacement vertical est égal à zéro. Ou bien si l'inconnue hyperstatique est un moment d'encastrement, la rotation à l'encastrement est égale à zéro.

Ici nous avons un appui ponctuel en B, le déplacement vertical du point B est donc nul :

Par superposition, nous avons :

 =  + $X_B \bullet$ 

Déplacement en B pour S_H = Déplacement en B pour S_0 + $X_B \bullet$ Déplacement en B pour S_1

0 = λ_{10} + $X_B \bullet$ λ_{11}

Nous obtenons donc comme équation supplémentaire :

$$0 = \lambda_{10} + X_B.\lambda_{11} \text{ (avec } X_B \text{ orienté comme } X_1\text{)}$$

D'où finalement : $\boxed{X_B = -\dfrac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}} = \dfrac{-3.q.L}{8}}$

(négatif dans le repère associé à X_1, donc l'action inconnue X_B est opposée au sens arbitraire choisi pour X_1.)

$\boxed{X_B = \dfrac{3.q.L}{8}}$ Dans le repère global.